2 章の問題のヒントと解答

解答 2.1

状態推移図は図 1 のようになる．状態 0，1 をそれぞれ欠席，出席とする．確率推移行列は，

$$P = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.85 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

である．

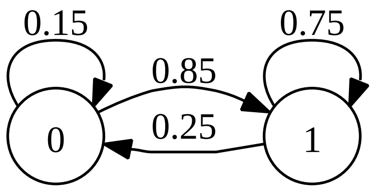

図 1　状態遷移図

解答 2.2

状態推移図は図 2 のようになる．

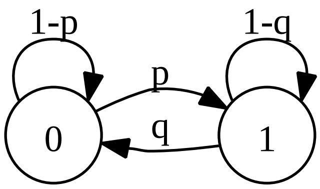

図 2　状態遷移図

このとき確率推移行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

であり，$p+q \neq 0$ のとき，

$$P^n = \frac{1}{p+q}\left\{\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}\right\}$$

となる．$1 \leq p, q \leq 0$ なので $p+q \neq 0$ とは $p=q=0$ であることに注意しよう．これは一度出席（欠席）したらずっと出席（欠席）することを意味する．つまりこのマルコフ過程は既約でない．

また $p \neq 1, q \neq 1$ のとき，つまり

$$P \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

なら（周期的なマルコフ過程でないなら），

$$\lim_{n\to\infty}(1-p-q)^n \to 0$$

となる．したがって上で述べたような特異な場合（既約でないか周期的なとき）を除いて，

$$P^\infty = \tfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$$

であり，確率推移行列は収束するので定常状態をもつ．

一方上で例外とした $p=1, q=1$ のときには，

$$P^n = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

となり，つまり，

$$P^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & n\text{ が偶数のとき} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & n\text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

となる．このことから周期的なマルコフ過程では P^n の極限は存在せず，定常分布も存在しないことが分かる．

解答 2.3

（解答省略）