3 章の問題のヒントと解答

解答 3.1

(1) 指数分布のとき：

平均到着率 λ の指数分布,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (\text{ただし } t > 0)$$

に対して,

$$\begin{aligned}
\text{平均値} &= \int_0^{+\infty} t \cdot f(t) dt \\
&= \int_0^{+\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \left[t(-e^{-\lambda t}) \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \\
&= \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^{+\infty} \\
&= 1/\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{分散} &= \int_0^{+\infty} (x - \text{平均値})^2 \cdot f(t) dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^2 f(t) dt - \text{平均値}^2 \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \left[t^2(-e^{-\lambda t}) \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} t e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \text{平均値} - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

となる.

(2) ポアソン分布のとき：

平均到着率 λ のポアソン分布,

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

に対して,

$$
\begin{aligned}
\text{平均値} &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(N=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \frac{\lambda \cdot \lambda^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= 0 \times \frac{\lambda^0}{1} \cdot e^{-\lambda} + \lambda \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda} \\
&= \lambda \times \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k'}}{k'!} \cdot e^{-\lambda} \ (k' = k-1 \text{ とする}) \\
&= \lambda \times \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k) \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{分散} &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \text{平均値})^2 \cdot P(N=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot P(N=k) - \text{平均値}^2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \cdot P(N=k) - \lambda^2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (k-1) \cdot P(N=k) + \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(N=k) - \lambda^2 \quad (k^2 = k \cdot (k-1) + k \text{ より}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (k-1) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} + \lambda - \lambda^2 \quad (\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot P(N=k) = \text{平均値}) \\
&= \lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \quad (k_2 = k-2 \text{ とすると } \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k_2}}{k_2!} \cdot e^{-\lambda} = 1 \text{ より}) \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

解答 3.2

到着間隔 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ が独立で同一な指数分布に従っており, 平均は $1/\lambda k$ であるとしよう．すなわちおのおのの確率密度関数は

$$f(x) = \lambda k e^{-\lambda k x}$$

とする．まず $X = X_1 + X_2$ の確率密度関数 $g_2(x)$ を考えてみる．これは $f(t)$ と $f(x-t)$ の和の分布として次のように求まる．

$$
\begin{aligned}
g_2(x) &= \int_0^x f(t)f(x-t)dt \\
&= \int_0^x (\lambda k)^2 e^{-\lambda k x} dt \\
&= (\lambda k)^2 x e^{-\lambda k x}
\end{aligned}
$$

同様にして $X = X_1 + X_2 + X_3$ の確率密度関数 $g_3(x)$ は,

$$
\begin{aligned}
g_3(x) &= \int_0^x g_2(t)f(x-t)dt \\
&= (\lambda k)^3 \frac{x^2}{2} e^{-\lambda k x}
\end{aligned}
$$

となる．以下同様にこれを繰り返すと，k 次のアーラン分布の確率密度関数である,

$$
g_k(x) = \frac{(\lambda k)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda k x}
$$

を得る．

また一般に $E(X), Var(X)$ を確率変数 X の平均値と分散とすれば，$X_1, X_2, \cdots, X_k$ が互いに独立なとき,

$$
\begin{aligned}
E(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) &= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_k) \\
Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_k) &= Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_k)
\end{aligned}
$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
E(E_k) &= k \times \frac{1}{\lambda k} = \frac{1}{\lambda} \\
Var(E_k) &= k \times \frac{1}{\lambda^2 k^2} = \frac{1}{\lambda^2 k}
\end{aligned}
$$

解答 3.3

まず平衡方程式を導く．N より小さい状態に対しては式 (3.29) と同様である．また状態 N については,
$N-1$ から N に移る確率は $\lambda\pi_{N-1}$ であり N から $N-1$ に移る確率は $s\mu\pi_N$ である．よって平衡方程式は次のようになる．

$$
\begin{cases}
\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 & \\
(\lambda + k\mu)\pi_k = \lambda\pi_{k-1} + (k+1)\mu\pi_{k+1} & (1 \le k < s) \\
(\lambda + s\mu)\pi_k = \lambda\pi_{k-1} + s\mu\pi_{k+1} & (s \le k < N) \\
s\mu\pi_N = \lambda\pi_{N-1} &
\end{cases}
$$

ここで

$$
f(k) = \min(s, k)
$$

を用いると，平衡方程式は以下のように表すことができる．

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ (\lambda + f(k)\mu)\pi_k = \lambda\pi_{k-1} + f(k+1)\mu\pi_{k+1} \quad (1 \leq k < N) \\ s\mu\pi_N = \lambda\pi_{N-1} \end{cases}$$

$k = 0, 1, ..., n-1 (n < N)$ について左辺と右辺の和をとると

$$\begin{aligned} \lambda\pi_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda + f(k)\mu)\pi_k &= \sum_{k=1}^{n-1}(\lambda\pi_{k-1} + f(k+1)\mu\pi_{k+1}) + \mu\pi_1 \\ \lambda\pi_0 + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda\pi_k + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)\mu\pi_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\lambda\pi_{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)\mu\pi_{k+1} + \mu\pi_1 \\ \lambda\pi_{n-1} + f(1)\mu\pi_1 &= f(n)\mu\pi_n + \mu\pi_1 \\ \lambda\pi_{n-1} &= \mu f(n)\pi_n \quad (f(1) = 1 \text{ より}) \\ \text{変形して} \quad \pi_n &= \frac{\lambda}{\mu f(n)}\pi_{n-1} \\ &= \frac{a}{f(n)}\pi_{n-1} = \frac{a^2}{f(n)\cdot f(n-1)}\pi_{n-2} = \cdots \\ &= \frac{a^n}{\prod_{k=1}^{n} f(k)}\pi_0 \quad (\text{ただし } n < N) \end{aligned}$$

さらに，

$$\begin{aligned} \pi_N &= \frac{\lambda}{s\mu}\pi_{N-1} \\ &= \frac{\lambda}{s\mu}\frac{a^{N-1}}{\prod_{k=1}^{N-1} f(k)}\pi_0 \\ &= \frac{a^N}{\prod_{k=1}^{N} f(k)}\pi_0 \quad (\frac{\lambda}{s\mu} = \frac{a}{f(N)} \text{より}) \end{aligned}$$

以上から，

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k &= \sum_{k=0}^{N}\pi_k \\ &= \pi_0 + \sum_{k=1}^{N-1}\pi_k + \pi_N \\ &= \pi_0 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{a^k}{\prod_{l=1}^{k} f(l)}\pi_0 + \frac{a}{f(N)}\pi_{N-1} \\ &= \sum_{k=0}^{N}\frac{a^k}{\prod_{l=1}^{k} f(l)}\pi_0 \\ &= \sum_{k=0}^{s-1}\frac{a^k}{k!}\pi_0 + \sum_{k=s}^{N}\frac{a^k}{s!s^{k-s}}\pi_0 \\ &= (\sum_{k=0}^{s}\frac{a^k}{k!} + \frac{s^s}{s!}\sum_{k=s+1}^{N}(\frac{a}{s})^k)\pi_0 \end{aligned}$$

となるが，ここで確率の総和（$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = \sum_{k=0}^{N} \pi_k$）は 1 なので

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s} \frac{a^k}{k!} + \frac{s^s}{s!} \sum_{k=s+1}^{N} (\frac{a}{s})^k}$$

また $f(1) = 1, f(2) = 2, \cdots, f(s) = s$，$f(s+1) = f(s+2) = \cdots = f(n) = s$ なので，

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{a^n}{n!}\pi_0 & (0 < n \leq s) \\ \frac{a^n}{s!s^{n-s}}\pi_0 & (s \leq n < N) \end{cases}$$

となる．

解答 3.4

（解答省略）

解答 3.5

（解答省略）

解答 3.6

（解答省略）