4 章の問題のヒントと解答

解答 4.1

（解答省略）

解答 4.2

$$\sigma = \int_0^\infty t^2 f(t)dt - MTTF^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

解答 4.3

(2) については，式 (4.30) の指数関数を展開して t の 2 次以上の項を省略すればよい．

解答 4.4

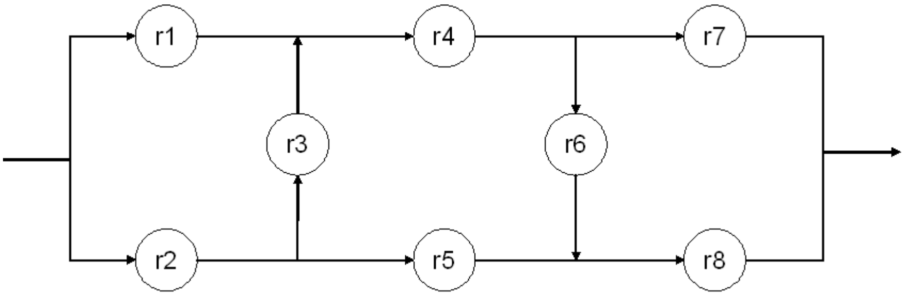


図 1　図 4.25 のシステム

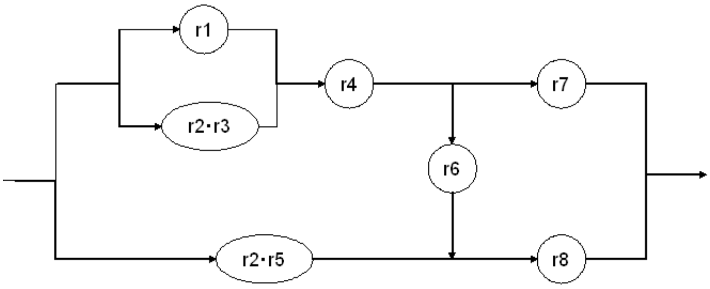
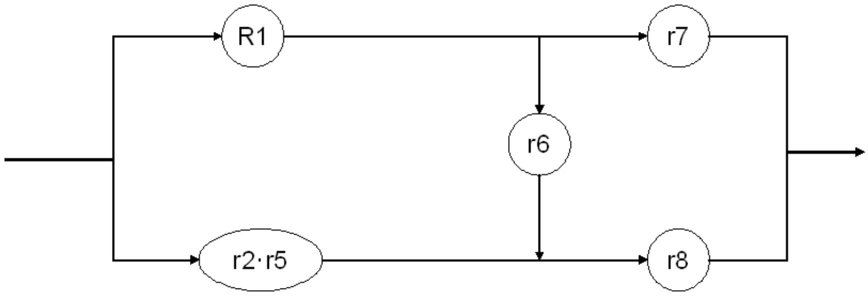


図 2　r2, r3 の簡約化



$$R1 = \{1 - (1 - r1)(1 - r2 \cdot r3)\} \cdot r4$$

図 3　並列・直列システムの簡約化

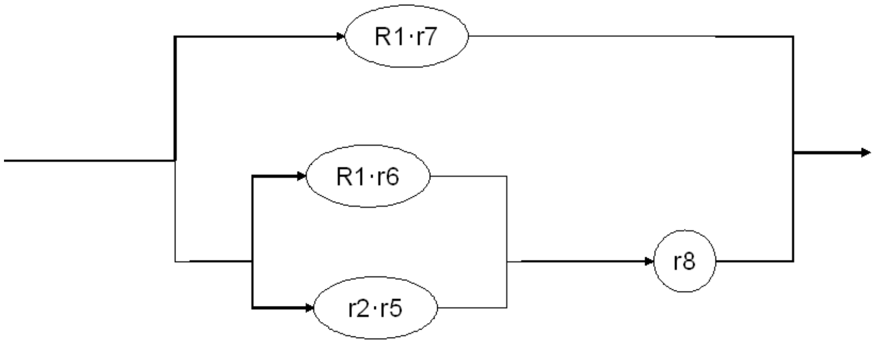
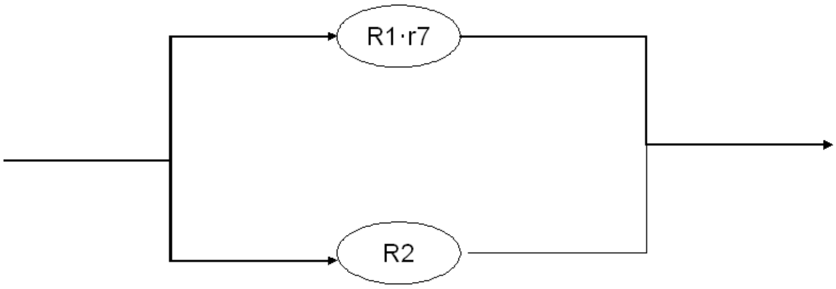


図 4　R1, r6 の簡約化



$$R2 = \{1 - (1 - R1 \cdot r6)(1 - r2 \cdot r5)\} \cdot r8$$

ゆえに $R = 1 - (1 - R1 \cdot r7)(1 - R2)$

図 5　最終的な並列システム

解答 4.5

Mikusinski の演算子法を用いて,

$$P_0(t) = \frac{s + \lambda + \mu}{s^2 + (2\lambda + \mu)s + \lambda^2} \tag{1}$$

$$= a\frac{1}{s+k_1} + b\frac{1}{s+k_2} \tag{2}$$

$$= ae^{-k_1 t} + be^{-k_2 t} \tag{3}$$

$$P_1(t) = \frac{2\lambda}{s^2 + (2\lambda+\mu)s + \lambda^2} \tag{4}$$

$$= c\frac{1}{s+k_1} + d\frac{1}{s+k_2} \tag{5}$$

$$= ce^{-k_1 t} + de^{-k_2 t} \tag{6}$$

となる．ただし $(s+k_1)\cdot(s+k_2) = s^2 + (2\lambda+\mu)s + \lambda^2$ とする．また両辺を通分して s の係数を比較すれば，a, b, c, d は以下の式を満たすことがわかる．

$$a + b = 1 \tag{7}$$

$$a\lambda_2 + b\lambda_1 = \lambda + \mu \tag{8}$$

$$c + d = 0 \tag{9}$$

$$c\lambda_2 + d\lambda_1 = \lambda \tag{10}$$

以上から,

$$MTTR = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty (P_0(t) + P_1(t))dt \tag{11}$$

$$= \frac{a}{\lambda_1} + \frac{b}{\lambda_2} + \frac{c}{\lambda_1} + \frac{d}{\lambda_2} \tag{12}$$

$$= \frac{a\lambda_2 + b\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{c\lambda_2 + d\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} \tag{13}$$

$$= \frac{\lambda+\mu}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_2} \tag{14}$$

$$= \frac{\lambda+\mu}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\lambda^2} \tag{15}$$

$$= \frac{2\lambda+\mu}{\lambda^2} \tag{16}$$

となる．

解答 4.6

Mikusinski の演算子法により，

$$(s+2\lambda)P_0(t) - \mu P_1(t) = 1 \tag{17}$$

$$2\lambda P_0(t) - (s+\lambda+\mu)P_1(t) + 2\mu P_2(t) = 0 \tag{18}$$

$$\lambda P_1(t) - (s+2\mu)P_2(t) = 0 \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

を得る．よって,

$$P_0(t) = \frac{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\lambda^2}{s^3+3(\lambda+\mu)s^2+2(\lambda+\mu)^2 s} \tag{21}$$
$$= a\frac{1}{s} + b\frac{1}{s+\lambda+\mu} + c\frac{1}{s+2(\lambda+\mu)} \tag{22}$$
$$= a + be^{-(\lambda+\mu)t} + ce^{-2(\lambda+\mu)t} \tag{23}$$

となる．ただし $a = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$ である（式 (21) ＝式 (22) で両辺を通分して $s=0$ とおけばよい）．式 (23) の第 2,3 項は $t \to \infty$ で 0 になることから以下を得る．

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} P_0(t) = a = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} \tag{24}$$

解答 4.7

- 式 (4.111) について：

図 4.17 の推移図に対する微分方程式は,

$$\frac{P_0(t)}{dt} = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \tag{25}$$
$$\frac{P_1(t)}{dt} = 2\lambda P_0(t) - (\lambda+\mu)P_1(t) + 2\mu P_2(t) \tag{26}$$
$$\frac{P_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - 2\mu P_2(t) \tag{27}$$

となり,

$$(s+2\lambda)P_0(t) - \mu P_1(t) = 1 \tag{28}$$
$$2\lambda P_0(t) - (s+\lambda+\mu)P_1(t) + 2\mu P_2(t) = 0 \tag{29}$$
$$\lambda P_1(t) - (s+2\mu)P_2(t) = 0 \tag{30}$$

を得る．よって,

$$P_0(t) = \frac{s^2+(\lambda+3\mu)s+2\mu^2}{s\{s^2+3(\lambda+\mu)s+2(\lambda+\mu)^2\}} \tag{31}$$
$$= a\frac{1}{s} + b\frac{1}{s+(\lambda+\mu)} + c\frac{1}{s+2(\lambda+\mu)} \tag{32}$$
$$= a + be^{-(\lambda+\mu)t} + ce^{-2(\lambda+\mu)t} \tag{33}$$
$$P_1(t) = \frac{2\lambda(s+2\mu)}{s\{s^2+3(\lambda+\mu)s+2(\lambda+\mu)^2\}} \tag{34}$$
$$= a'\frac{1}{s} + b'\frac{1}{s+(\lambda+\mu)} + c'\frac{1}{s+2(\lambda+\mu)} \tag{35}$$
$$= a' + b'e^{-(\lambda+\mu)t} + c'e^{-2(\lambda+\mu)t} \tag{36}$$

となる．ただし $a = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$，$a' = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}$ である．式 (33) と式 (36) の第 2,3 項は $t \to \infty$ で 0 になる．
したがって定常状態を考えると，システムのアベイラビリティは以下のようになる．

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} P_0(t) + P_1(t) = a + a' = \frac{2\lambda\mu + \mu^2}{(\lambda+\mu)^2}$$

となる．

- 式 (4.112) について：

図 4.18 の推移図に対する微分方程式は,

$$\frac{P_0(t)}{dt} = -2\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \tag{37}$$
$$\frac{P_1(t)}{dt} = 2\lambda P_0(t) - (\lambda+\mu) P_1(t) + \mu P_2(t) \tag{38}$$
$$\frac{P_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \tag{39}$$

となり,

$$(s+2\lambda)P_0(t) - \mu P_1(t) = 1 \tag{40}$$
$$2\lambda P_0(t) - (s+\lambda+\mu)P_1(t) + \mu P_2(t) = 0 \tag{41}$$
$$\lambda P_1(t) - (s+\mu)P_2(t) = 0 \tag{42}$$

を得る．よって,

$$P_0(t) = \frac{s^2 + (\lambda+2\mu)s + \mu^2}{s\{s^2 + (3\lambda+2\mu)s + (2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2)\}} \tag{43}$$
$$= a\frac{1}{s} + b\frac{1}{s+k_1} + c\frac{1}{s+k_2} \tag{44}$$
$$= a + be^{-k_1 t} + ce^{-k_2 t} \tag{45}$$
$$P_1(t) = \frac{2\lambda(s+\mu)}{s\{s^2 + (3\lambda+2\mu)s + (2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2)\}} \tag{46}$$
$$= a'\frac{1}{s} + b'\frac{1}{s+k_1} + c'\frac{1}{s+k_2} \tag{47}$$
$$= a' + b'e^{-k_1 t} + c'e^{-k_2 t} \tag{48}$$

となる．ただし $(s+k_1)\cdot(s+k_2) = s^2 + (3\lambda+2\mu)s + (2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2)$ とする．また $a = \frac{\mu^2}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}$，$a' = \frac{2\lambda\mu}{2\lambda^2+2\lambda\mu+\mu^2}$ である．式 (45) と式 (48) の第 2,3 項は $t \to \infty$ で 0 になる．
したがって定常状態を考えると，システムのアベイラビリティは以下のようになる．

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} P_0(t) + P_1(t) = a + a' = \frac{\mu^2 + 2\lambda\mu}{2\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2}$$

となる．

解答 4.8

（解答省略）

解答 4.9

（解答省略）